**ELEMENTI DI LOGICA MATEMATICA (LOGICA CLASSICA)**

La LOGICA CLASSICA è quella dove vale il principio di NON CONTRADDIZIONE, ovvero che vale una affermazione o il suo contrario, mai entrambe.

ES. L’astuccio o è blu o non è blu.

* **DEFINIZIONE DI PROPOSIZIONE**

Una PROPOSIZIONE (DICHIARATIVA) è un’affermazione di cui possiamo con CERTEZZA stabilire se è vera o falsa, ed essa NON può essere contemporaneamente VERA e FALSA.

Se una proposizione è vera, le si attribuisce il valore di verità V (o T dall’inglese), se è falsa F (o 0).

ES. P: 8 è un numero dispari

È una proposizione ed è falsa

Q: il cane è un mammifero

È una proposizione ed è vera

R: le cicorie sono buone

Non è una proposizione

S: X è un numero positivo

Non è una proposizione (ambiguità del soggetto X)

-se X = 5 è vera

-se X = -5 è falsa

-se X = 0 è falsa

Z: X + 6 = 0

Non è una proposizione

Possiamo introdurre i QUANTIFICATORI per rendere le ultime due affermazioni (S e Z) delle proposizioni.

* **QUANTIFICATORE ESISTENZIALE Ǝ (esiste)**

“Ǝ x ꟾ” x è un numero positivo

“Esiste x tale che” x è un numero positivo

Ǝ x ꟾ x + 6 = 8 è proposizione ed è vero

(basta prendere x=2)

* **QUANTIFICATORE UNIVERSALE ꓯ (per ogni**)

ꓯ x x è positivo è proporzione ed è falso

ꓯ x ϵ Z = {0,1,-1,2,-2, …} x è proposizione ed è falsa

**CONNETTIVI LOGICI**

* **NEGAZIONE**

Data una proposizione P, la NEGAZIONE di P è la proposizione che indichiamo con ￢P (“non P”) tale che se P è vera ￢P è falsa e viceversa.

|  |  |
| --- | --- |
| P | ￢P |
| V | F |
| F | V |

ES. P: 5 è un numero negativo

￢P: 5 non è un numero negativo

5 è un numero non negativo

5 è un numero positivo oppure è 0

5 è un numero ≥0

ES. P: Ogni giorno (ꓯ) Marco (quel Marco, non uno a caso) va a Roma

￢P: Non è vero che ogni giorno Marco va a Roma

Ǝ almeno un giorno della settimana in cui Marco non va a Roma

ES. P: Ǝ un numero intero positivo che è pari

Non esiste un numero intero positivo che è pari

ꓯ numero positivo esso non è pari

Ogni numero intero positivo è dispari

OSS. L’esistenza si nega con l’universalità ꓯ

L’universalità si nega con l’esistenza Ǝ

* **CONGIUNZIONE**

Siano P e Q 2 proposizioni. La proposizione P ∧ Q (“P e Q”) è vera se sono entrambe vere, falsa altrimenti.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P ∧ Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | F |
| F | V | F |

ES. P: Il mio cellulare è blu

Q: Il mio cellulare è un Iphone

P ∧ Q: Il mio cellulare deve essere blu e deve essere un Iphone

* **DISGIUNZIONE**

Siano P e Q 2 proposizioni. La proposizione P ∨ Q (“P o Q”) è falsa quando sono entrambe false, è vera altrimenti.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P ∨ Q |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

ES. P: Il mio cellulare è blu

Q: Il mio cellulare è un Iphone

Affinché sia vera è sufficiente che una tra P e Q sia vera.

ES. P ∧ Q: Il mio cellulare è un Iphone che è blu

￢ (P ∧ Q): Non è vero che il mio cellulare è un iphone e che è blu

￢ (P ∧ Q): ￢P V ￢Q: Il mio cellulare non è un Iphone e non è bluQQq

* **IMPLICAZIONE**

Siano P e Q 2 proposizioni. La proposizione P→Q (“P implica Q”) è falsa quando P è vera e Q è falsa, è vera altrimenti.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P→Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

ES. P: La mia penna scrive

Q: La mia penna ha l’inchiostro

P→Q: Se la mia penna scrive allora ha l’inchiostro

OSS. L’implicazione è sempre vera anche se la P è falsa

ES: P: Il cane è un rettile F

Q: 5+3=8 V

P→Q: V

R: 7+2=1 F

P→R F

* **DOPPIA IMPLICAZIONE**

Siano P e Q 2 proposizioni. La DOPPIA IMPOLICAZIONE di P e Q si denota con P↔Q ed è vera se sono entrambe vere o entrambe false, è falsa altrimenti.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P↔Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

OSS. La doppia implicazione è vera se sono entrambe vere le implicazioni P→Q e Q→P.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P→Q | Q→P |
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | F | V | F |
| F | V | V | V |

* **PROPOSIZIONE PRIMITIVA**

Una proposizione si dice PRIMITIVA se NON si può spezzare in proposizioni più semplici mediante connettivi logici.

Una proposizione non primitiva si dice COMPOSTA.

ES: P: Giovanni è alto è ha un maglione blu

È composta, infatti P=QVR

Q: Giovanni è alto

R: Giovanni ha un maglione blu

ES: P: Giovanni è alto è primitiva

* **TAUTOLOGIA & CONTRADDIZIONE**

Una proposizione composta che è sempre vera si dice TAUTOLOGIA, una proposizione composta che è sempre falsa si dice CONTRADDIZIONE.

ES. P ∧￢P è composta

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | ￢P | P ∧￢P |
| V | F | F |
| F | V | F |

P ∧￢P è sempre falsa, quindi è una CONTRADDIZIONE

ES. P V￢P è composta

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | ￢P | P V￢P |
| V | F | V |
| F | V | V |

P V￢P è sempre vera, quindi è una TAUTOLOGIA

* **TEOREMA**

P→Q è vera cioè “se P è vera allora (C) Q è vera”

Cioè “se Q è falsa allora (⇒) P è falsa”

P⇔Q = P⇒Q e Q⇒PQQ

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
|  | | |  | | |  | |  |  |
| P | Q | P⇒Q | | Q⇒P | P⇔Q | |
| V | V | V | | V | V | |
| V | F | F | | V | F | |
| F | V | V | | F | F | |
| F | F | V | | V | V | |

**EQUIVALENZA DI PROPOSIZIONE**

Due proposizioni P e Q si dicono EQUIVALENTI se hanno le stesse tavole di verità, cioè se P è vera e se e solo se Q è vera.

Se P e Q sono equivalenti scriveremo P⇔Q (“P se e solo se Q”) QQ

Oss. P⇔Q quando P↔Q è una TAUTOLOGIA

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | QQQ | P↔Q |
| V | V | V |
| F | F | V |

ES. Siano P e Q 2 proposizioni e studiamo ￢ (P ∧ Q) e (￢P) V (￢Q)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P∧ Q | ￢(P∧Q) | ￢P | ￢Q | (￢P) V (￢Q) |
| V | V | V | F | F | F | F |
| V | F | F | V | F | V | V |
| F | V | F | V | V | F | V |
| F | F | F | V | V | V | V |

Le 2 proposizioni sono EQUIVALENTI perciò ￢(P∧Q) ⇔ (￢P) V (￢Q)

La NEGAZIONE di una CONGIUNZIONE è equivalente alla DISGIUNZIONE della NEGAZIONE.

ESERCIZIO

￢ (P V Q) ⇔ (￢P) ∧ (￢Q)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | P∧ Q | ￢(PVQ) | ￢P | ￢Q | (￢P) ∧ (￢Q) |
| V | V | V | F | F | F | F |
| V | F | V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | V | F | F |
| F | F | F | V | V | V | V |

Le 2 proposizioni sono equivalenti perciò ￢ (P V Q) ⇔ (￢P) ∧ (￢Q)

ES./ESERCIZIO

Dimostrare che P→Q equivale a ￢Q→ ￢P cioè che P→Q ⇔ ￢Q→ ￢P

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| P | Q | ￢P | ￢Q | P→Q | ￢Q→ ￢P |
| V | V | F | F | V | V |
| V | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V |

Le 2 proposizioni sono equivalenti perché hanno la stessa tabella di verità, perciò P→Q ⇔ ￢Q→ ￢P

Se P allora Q

P → Q P⇒Q “allora, quindi, perciò”

Ipotesi tesi “Q è conseguenza logica di P”

* **TEOREMA se P allora Q**

(equivale a dire che l’implicazione P→Q è vera)

Cioè se l’ipotesi (P) è vera allora anche la tesi (Q) è vera

se l’ipotesi (P) è falsa la tesi (Q) può essere indifferentemente vera o falsa

NON può accadere ipotesi vera e tesi falsa

ES. P: X è un uomo

Q: X è un mammifero

P⇒Q

* **COME SI DIMOSTRA UN TEOREMA**

Per dimostrare un teorema dobbiamo far vedere che se P è vera anche Q è vera (cioè escludiamo il caso in cui P è vera e Q è falsa)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| P | Q | P⇒Q |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

**DIMOSTRAZIONE DIRETTA**: far vedere che se P è vera allora anche Q è vera

**DIMOSTRAZIONE INDIRETTA**: far vedere che se Q è falsa allora P è falsa

Se ￢P è vera allora ￢Q è vera e viceversa

* **PRINCIPIO DI INDUZIONE**

Il principio di induzione fornisce una tecnica dimostrativa per proposizioni che dipendono da un numero naturale n , o più in generale che dipendono da un parametro i che varia in un insieme numerabile (insieme che può enumerato, ovvero che può essere messo in corrispondenza biunivoca con N)

* **INSIEME NUMERABILE**

DEFINIZIONE: Un insieme A si dice NUMERABILE se esiste una funzione bigettiva da f: A🡪N (ciò è equivalente a dire che esiste una funzione bigettiva da N🡪A)

Cosa vuol dire che una proposizione dipende da un numero naturale?

ES. Sia x un insieme finito, cioè |x|= n .

x={a1, a2, a3,…,an}

Considera l’insieme delle parti di x, P(x), cioè l’insieme di tutti i sottoinsiemi di x, ovvero

P(x): {A insieme | A x}

Qual è la cardinalità di P(x)?

Se |x|=0 🡪 x=Ø 🡪 P(x)={Ø}

Se |x|=1 🡪 x={a} 🡪 P(x)={Ø,{a}} 🡪|P(x)|=2

Se |x|=2 🡪 x={a, b} 🡪 P(x)={Ø,{a},{b},{a, b}} 🡪|P(x)|=4

Se |x|=3 🡪 x={a, b, c} 🡪 P(x)={Ø,{a},{b},{c}{a, b},{a,c}{b,c},{a,b,c}} 🡪|P(x)|=8

Generalizzando si può dire che |P(x)|=

TEOREMA

Se x è un insieme e |x|= n allora |P(x)|=

Affinché il teorema sia vero dobbiamo provare che la proposizione

sia vera.

Supponiamo di avere una proposizione P(n) e di voler dimostrare che P(n) è vera

* **PRINCIPIO DI INDUZIONE (PRIMA FORMA)**

∀n∈N sia P(n) una proposizione che dipende da n.

* Se P(0) è vera e
* si ha che P(k) vera P(k+1) vera allora P(n) è vera ∀n∈N.

Quindi il principio di induzione afferma che se il caso di base P(0) è vero e che ⩝k è vero allora anche P(k+1) è vero, quindi è vero per ogni P(n).

OSSERVAZIONE: Nella pratica se vogliamo dimostrare che una proposizione P(n) è vera ∀n∈N dobbiamo per prima cosa fare il cosìddetto PASSO BASE, ovvero dimostrare che P(0) è vero; poi dobbiamo fare il PASSO INDUTTIVO, ovvero ∀k∈N dimostrare che se P(k) è vera allora P(k+1) è vero.

IPOTESI INDUTTIVA TESI del passo INDUTTIVO

Se il passo base e il passo induttivo sono verificati, allora P(n) è vera ∀n∈N.

Dimostriamo mediante il principio di induzione il seguente teorema:

TEOREMA: Se x è un insieme e |x|= n∈N allora

DIMOSTRAZIONE:

1. PASSO BASE: Dobbiamo provare che P(0): Se x=0 🡪 |P(x)|= è vera

Supponiamo n=0 🡪 |x|=0 🡪 x=Ø 🡪 P(x)={Ø} 🡪 |P(x)|=1 = 🡪 P(0) è vera, quindi passo base verificato;

1. PASSO INDUTTIVO: ∀k∈N dobbiamo verificare che se P(k) è vera allora P(k+1) è vera.

Ipotesi: P(k): Se |x|=k 🡪 |P(x)|= è vera

Tesi: P(k+1): Se |x|=k+1 🡪 |P(x)|= è vera

Supponiamo che |x|=k+1, cioè x={a1, a2, a3,…,ak, ak+1}= {a1,…,ak} U {ak+1}

P(x)= {A | Ax}=

= {Ax | ak+1A} U {Ax | ak+1A}

Quali sono i sottoinsiemi che non contengono ak+1?

{Ax | ak+1A} = P({a1,…,ak})

|{Ax | ak+1A}| = | P({a1,…,ak})|= 🡪 per IPOTESI INDUTTIVA

Ora dobbiamo calcolare la cardinalità di P(x), dobbiamo capire com’è fatto quell’insieme

{Ax | ak+1A} = Ax A= B U {ak+1}

Dove Bx non

contiene ak+1

Per IPOTESI INDUTTIVA

|{Ax | ak+1A}|= Ax A= B U {ak+1} = |{}|=|P({a1,…,ak})|= 🡪

Con Bx e ak+1 B

* |P(x)|= |{A}| + |{A}|= = 2\*

Abbiamo dimostrato ∀k∈N che se P(k) è vera allora anche P(k+1) è vera 🡪 il PASSO INDUTTIVO è verificato.

Poichè passo base e passo induttivo sono entrambi verificati, il principio di induzione ci assicura che P(n) è vera ∀n∈N .

* **PRINCIPIO DI INDUZIONE (SECONDA FORMA)**

∀n∈N, sia P(n) una proposizione che dipende da n.

* Se P(0) è vera e
* ∀k∈N si ha che se P(h) è vera allora P(k+1) è vera, allora anche P(n) è vera ∀n∈N

P(k) vera 🡪 P(k+1) vera

P(0), P(1), P(2), …P(k) è vera 🡪 P(k+1) è vera 🡪 PASSO INDUTTIVO

Ci sono dei casi in cui è fondamentale usare questa forma.

ES.

Questo conto non ha senso perchè il 1° termine ha uno 0 al denominatore

* **PRINCIPIO DI INDUZIONE GENERALIZZATO (PRIMA FORMA)**

∀n∈N, con nn0, sia P(n) una proposizione che dipende da n.

* Se P(n0) è vera e PASSO BASE
* Se , con K, si ha che se P(k) è vera, allora P(k+1) è vera, PASSO INDUTTIVO

allora P(n) è vera ( nell’esempio di sopra n0=1) CONCLUSIONE

* **PRINCIPIO DI INDUZIONE GENERALIZZATO (SECONDA FORMA)**

∀n∈N, con nn0, sia P(n) una proposizione che dipende da n.

* Se P(n0) è vera e PASSO BASE
* Se , con K, si ha che se P(h) è vera PASSO INDUTTIVO

allora P(k+1) è vera,

allora P(n) è vera CONCLUSIONE

1. Dimostrare che P(n0) è vera
2. assumiamo P(n0), P(n0+1),…, P(k) vera e dimostriamo P(k+1) vera
3. P(n) è vera

Vediamo 2 esempi sbagliati di applicazione di principio di induzione.

ES. 1

P(n): n= n+1

Proviamo a dimostrarlo

PASSO INDUTTIVO: Supponiamo che P(k): k= k+1 sia vera e dimostriamo che P(k+1): k+1 = (k+1)+1 è vera

k+1=(k+1)+1 P(k+1) è vera

P(k) è vera, cioè k=k+1

* Il passo induttivo è verificato

Ma allora è vero che 5=6? O 10=11?

NO: Bisogna verificare anche il passo base che non è verificato, infatti P(0): 0=1 è falsa

ES. 2

Proviamo che tutti i gatti hanno lo stesso colore, cioè che , ogni insieme di n gatti è dato da gatti dello stesso colore.

P(n): Tutti i gatti in un qualunque insieme di gatti hanno lo stesso colore.

1. PASSO BASE: Proviamo che P(1) è vera, ciò è verificato banalmente: in ogni insieme con un solo gatto, tutti i gatti hanno lo stesso colore;
2. PASSO INDUTTIVO: Proviamo che che se P(k) è vera (cioè tutti i gatti in un insieme qualunque di k gatti hanno lo stesso colore) allora anche P(k+1) è vera.

Sia G={g1, g2,…,gk, gk+1} un insieme con k+1 gatti

Consideriamo il sottoinsieme formato dai primi k gatti:

Sia H={g1,..,gk} 🡪 allora il fatto che P(k) sia assunta vera ci dice che tutti i gatti in H hanno lo stesso colore.

Sia M={g2,…,gk} 🡪 per lo stesso motivo i gatti di M hanno lo stesso colore.

Per esempio gk+1 ha lo stesso colore di g2. Ma g2 ha lo stesso colore di g1, g3,…, gk perché appartiene ad Hg1, g2,…,gk+1 hanno tutti lo stesso colore.

G={g1, g2} il problema del ragionamento è che esso presuppone k2 così che k+13.

H M

Tuttavia non ci permette di dimostrare che P(1) vera P(2) vera e quindi non possiamo ragionare per INDUZIONE su n

ES.

Dimostrare che si ha che

Possiamo scrivere P(n): e dimostrare per induzione su che P(n) è vera .

1. PASSO BASE: proviamo che P(0) : è vera

ipotesi

🡪 P(0)è vera

1. PASSO INDUTTIVO: dimostriamo che se P(k): è vera allora P(k+1): è anch’essa vera.

tesi

🡪 P(k+1) è vera

🡪 Il passo induttivo è verificato

1. CONCLUSIONE: Poiché passo base e passo induttivo sono verificati, il principio di induzione ci assicura che P(n) è vera